线性代数　中国科学技术大学 2023 春
欧氏空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

欧氏空间的定义

定义 (内积, 欧氏空间)

设 V 为有限维 $\mathbb{R}$-线性空间. 若存在一个映射 $(-,-)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ 满足:

1. 对称性: $(a,b)=(b,a)$;
2. 双线性: $(\lambda a,b)=\lambda(b,a)$, $(a+b,c)(a,c)+(b,c)$;
3. 正定性: $(a,a)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a=0$,

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积. 带内积的 $\mathbb{R}$-线性空间称为欧氏空间(或,欧几里得空间).

定义 (长度, 夹角)

设 V 为欧氏空间. 对于任意向量 $a, b \in V$,

1. 称 $|a| := \sqrt{(a,a)}$ 为 a 的长度(或,模长);
2. 称 $|a-b|$ 为 a 和 b 之间的距离. 记为$d(a,b)$.
3. 若 a, b 不为零, 定义 a 和 b 之间的夹角为 $\theta = \arccos \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$[a]. 特别地, 当 $(a,b)=0$ 时, 称 a 与 b正交或垂直, 记为 $a \perp b$.
4. 称 a 为单位向量, 若 $|a|=1$. 若 $b \neq 0$, 称 $\frac{1}{|b|}b$ 为 b 的单位化.

---

[a] Cauchy-Schwarz 不等式

$$|(a,b)| \leq \sqrt{(a,a)\cdot(b,b)}.$$

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为欧氏空间 V 的一组基. 令 $g_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)(1 \le ij \le n)$. 记

$$G := (g_{ij})_{n \times n}.$$

则

$$(\alpha, \beta) = x^T G y. \tag{1}$$

其中 x, y 分别为 α 和 β 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标. 称 G 为内积 $(-,-)$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的度量矩阵.

通过度量矩阵我们有如下映射

$$\begin{array}{ccc} V\text{ 上的内积} & \xrightarrow{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} & \mathbb{R}\text{上的 } n \text{ 阶矩阵} \\ (-,-) & \longmapsto & G = \Big((\alpha_i, \alpha_j)\Big)_{n \times n} \end{array}$$

度量矩阵的正定性

问题: 哪些矩阵落在这个映射的像集里面? 即, 哪些矩阵能够成为某个内积的度量矩阵?

性质 (度量矩阵的基本性质)

1. 设 G 为 V 上某内积 $(-,-)$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的度量矩阵. 则
   - G 为实对称矩阵;
   - 对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $x^TGx\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $x=0$.

   称满足如上性质的矩阵为正定矩阵. 因此内积的度量矩阵为正定矩阵.
2. 反之, 对于任意给定的正定矩阵 G, 通过
$$(\alpha,\beta):=x^TGy$$
可以构造出 V 上的一个内积, 其中 x,y 为 α 和 β 的坐标.

性质

设 P 为欧氏空间的两组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为之间的过渡矩阵

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P.$$

设内积在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵为 G 和 $\overline{G}$. 即,

$$G=\Big((\alpha_i,\alpha_j)\Big)_{n\times n},\quad \overline{G}=\Big((\eta_i,\eta_j)\Big)_{n\times n}.$$

则

$$\overline{G}=P^TGT.$$

定义 (相合)

称两个矩阵 G 和 $\overline{G}$ 相合, 若存在可逆阵 P 使得

$$\overline{G}=P^TGP.$$

标准正交基

度量矩阵的最简形式? 为了回答这一问题, 我们需要引入标准正交基.

定义 (标准正交基)

设 V 为 n 维欧氏空间.

1. 称由一组两两正交的非零向量为正交向量组;
2. 称由正交向量组构成的基为正交基;
3. 称由单位向量组成的正交基为标准正交基.

性质

正交向量组线性无关.

定理 (标准正交基使度量矩阵最简)

设 V 为 n 维欧氏空间. 设 G 为内积在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的度量矩阵. 则

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \text{ 为标准正交基} \quad \Leftrightarrow \quad G = I_n.$$

下面将讨论标准正交基的存在性.

Schmidt 正交化

定理 (Schmidt 正交化)

给定欧氏空间的任意一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 则存在一组标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 使得 (对所有的 $i = 1, 2, \cdots, n$)

$$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_i \rangle = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle.$$

几何解释? 证明思路: 递归地定义 $\beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_k, e_i) e_i \neq 0$ 以及 $e_k = \frac{\beta_k}{|\beta_k|}$.

例

将 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 标准正交化.

推论

对任意正定矩阵 A, 存在可逆实矩阵 P 使得 $A = P^T P$.

正交变换

n 维欧氏空间	$\xleftrightarrow[1:1]{\text{标准正交基基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$	$\mathbb{R}^n$(带标准内积)
线性变换 $\mathscr{A}$	$\xleftrightarrow[1:1]{\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}$	矩阵 A
$\mathscr{A}$(保持内积)	$\longleftrightarrow$	??

例

空间 (平面) 的旋转和镜面反射等.

定义 (正交变换)

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 若 $\mathscr{A}$ 保持内积, 即 (对任意 $a, b \in V$,

$$(\mathscr{A}a, \mathscr{A}b) = (a, b),$$

则称 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

正交变换的等价刻画

定理

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 则以下几条等价

1. $\mathscr{A}$ 正交;
2. $\mathscr{A}$ 保持向量长度;
3. $\mathscr{A}$ 将标准正交基变为标准正交基.

证明思路:(1)⇔(2) & (1)⇔(3)

(1)⇒(2): $|\mathscr{A}(\alpha)| = \sqrt{(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha))} = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = |\alpha|$;

(2)⇒(1): $(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = \frac{|\mathscr{A}(\alpha+\beta)|^2 - |\mathscr{A}(\alpha)|^2 - |\mathscr{A}(\beta)|^2}{2}$

$$= \frac{|\alpha+\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} = (\alpha, \beta)$$

(1)⇒(3): $e_1, \cdots, e_n$ = 标准正交基 $\Rightarrow (\mathscr{A}(e_i), sA(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(e_1), \cdots, \mathscr{A}(e_n) = \text{标准正交基}.$$

(3)⇒(1): 设 $\mathscr{A}$ 将标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 映为另一组标准正交基 $\mathscr{A}(e_1), \cdots, \mathscr{A}(e_n)$. 任取

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad \text{和} \quad \beta = \sum_{i=1}^n b_i e_i.$$

则

$$(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathscr{A}(e_i), \sum_{i=1}^n b_j \mathscr{A}(e_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j \left(\mathscr{A}(e_i), \mathscr{A}(e_j) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j (e_i, e_j) = (\alpha, \beta)$$

定理 (全体正交变换在复合运算下构成群)

设 V 为欧氏空间. 则

1. 单位变换为正交变换;
2. 正交变换的复合仍然为正交变换;
3. 正交变换可逆且其逆也为正交变换.

证明思路: 保持长度.

注: 正交变换群描述了欧氏空间的对称性.

正交变换在标准正交基下的矩阵

设正交变换 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A.

这个矩阵 A 满足什么特别的性质?

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\text{正交} &\Leftrightarrow \mathscr{A}e_1, \cdots, \mathscr{A}e_n \text{为标准正交基} \\
&\Leftrightarrow (\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) = \delta_{ij}(\text{对任意的} 1 \le i,j \le n) \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{\ell=1}^n a_{\ell i}e_\ell, \sum_{k=1}^n a_{kj}e_k\right) = \delta_{ij}(\text{对任意的} 1 \le i,j \le n) \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}(\text{对任意的} 1 \le i,j \le n) \\
&\Leftrightarrow A^T A = I_n
\end{aligned}
$$

定义 (正交矩阵)

若 n 阶实方阵 A 满足 $A^T A = I_n$(或 $A^{-1} = A^T$), 则称 A 为正交矩阵.

注: 正交矩阵的行向量 (或列向量) 构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 (在标准内积下).